ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 519.7

ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ РАБОТЫ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

© И.П. Буряченко

Аннотация. Рассмотрена интервальная арифметика – понятие интервала, стандартная интервальная арифметика и нестандартные операции над интервалами, а также решение некоторых уравнений. Описаны представление интервала как математического объекта в памяти ЭВМ, реализация интервальной арифметики и решение уравнений в системе компьютерной алгебры Math Partner с использованием языка объектно-ориентированного программирования Java.
Ключевые слова: интервальная арифметика; интервальные числа; система компьютерной алгебры Math Partner

ВВЕДЕНИЕ

Приближенные методы вычислений являются на данный момент наиболее применяемыми в различных технических науках. При этом большое значение имеет оценка погрешности. Эта оценка показывает, насколько близко к точному полученное решение. Такую оценку погрешности и дает интервальная арифметика.

Интервальная арифметика, или интервальный анализ, или интервальные вычисления задает операции над интервалами, аналогичные арифметическим операциям. Интервальная арифметика учитывает погрешность данных, ошибки дискретизации вычислительных методов, погрешности арифметических операций.

В интервальной арифметике арифметические операции с данными числами заменяются на операции с интервалами, содержащими эти числа. В интервальной арифметике вводятся четыре основные арифметические операции – сложение, вычитание, умножение и деление. А также рассматриваются еще две операции – нестандартное вычитание и нестандартное деление, которые необходимы для решения отдельных задач.

Поэтому разработка алгоритмов для работы с интервальными числами и их программная реализация имеют практическую ценность.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В статье мы опишем класс интервальных чисел, программно реализованный в системе компьютерной алгебры Math Partner[1] [1]. В классе описаны представление интервальных чисел в памяти ЭВМ, программная реализация основных характеристик интервальных чисел, программная реализация методов интервальной арифметики со стандартными и нестандартными операциями, программная реализация методов решения линейных уравнений интервальной арифметики.

1. Действия с интервальными числами

1.1 Определение интервальных чисел

Пусть $\mathbb{R}$ – множество всех вещественных чисел. Под интервалом $[\mathrm{a}, \mathrm{b}], \mathrm{a} \leq \mathrm{b}$ понимается замкнутое ограниченное подмножество $\mathbb{R}$ вида $[a, b]=\{x | x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \leq b\}$ [2–3].

Множество всех интервалов обозначим через $I(\mathbb{R})$. Если A – элемент $I(\mathbb{R}), A \in I(\mathbb{R})$, то его левый и правый концы обозначаются как $a, \bar{a}$: $A = [a, \bar{a}]$. Элементы $I(\mathbb{R})$ называются интервальными числами.

В проекте Math Partner был разработан класс Interval и программно реализован на языке Java [4].

<u>Класс Interval:</u> «public class Interval extends Element {};»

1.2 Стандартная интервальная арифметика и ее реализация

Арифметические операции над интервальными числами определяются следующим образом. Пусть $* \in \{+,-, \cdot, /\}, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in I(\mathbb{R})$. Тогда

$$A * B=\{a * b | a \in A, b \in B\}, \qquad (1)$$

причем в случае деления $0 \notin B$.

Дадим эквивалентные определения каждой операции.

Операция сложения

$A+B=[a, \bar{a}]+[b, \bar{b}]=[a+b, \bar{a}+\bar{b}]$.

<u>Метод сложения интервалов:</u>

«public Element add(Element e, Ring ring) {};»

<u>Пример сложения интервалов.</u>

Дано: $A = [1, 2]$, $B = [1, 2]$.

Решение. $A+B=[a, \bar{a}]+[b, \bar{b}]=[a+b, \bar{a}+\bar{b}]=[1+1,2+2]= [2,4]$.

[1] Система компьютерной алгебры Math Partner. URL: http://mathpar.cloud.unihub.ru/ru/ (дата обращения: 07.04.2019). (дата обращения: 06.04.2019).

Операция вычитания

$A - B = [a, \bar{a}] - [b, \bar{b}] = [a - b, \bar{a} - \bar{b}]$.

Метод вычитания интервалов:

«public Element subtract(Element e, Ring ring) {};»

Пример вычитания интервалов.

Дано: $A = [1, 2]$, $B = [1, 2]$.

Решение. $A - B = [a, \bar{a}] - [b, \bar{b}] = [a - \bar{b}, \bar{a} - b] = [1 - 2, 2 - 1] =$
$= [-1,1]$.

Операция умножения

$A \cdot B = [a, \bar{a}] \cdot [b, \bar{b}] = [\min\{ab, \bar{a}b, a\bar{b}, \overline{ab}\}, \max\{ab, \bar{a}b, a\bar{b}, \overline{ab}\}]$.

Метод умножения интервалов:

«public Element multiply(Element e, Ring ring) {};»

Пример умножения интервалов.

Дано: $A = [1, 2]$, $B = [1, 2]$.

Решение.

$$A \cdot B = [a, \bar{a}] \cdot [b, \bar{b}] = [\min\{ab, \bar{a}b, a\bar{b}, \overline{ab}\}, \max\{ab, \bar{a}b, a\bar{b}, \overline{ab}\}] =$$
$$= [\min\{1 \cdot 1, 1 \cdot 2, 2 \cdot 1, 2 \cdot 2\}, \max\{1 \cdot 1, 1 \cdot 2, 2 \cdot 1, 2 \cdot 2\}] = [1, 4].$$

Операция деления

$\frac{A}{B} = \frac{[a,\bar{a}]}{[b,\bar{b}]} = [\min\left\{\frac{a}{b}, \frac{\bar{a}}{b}, \frac{a}{\bar{b}}, \frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right\}, \max\left\{\frac{a}{b}, \frac{\bar{a}}{b}, \frac{a}{\bar{b}}, \frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right\}]$.

Метод деления интервалов:

«public Element divide(Element e, Ring ring) {};»

Пример деления интервалов.

Дано: $A = [1, 2]$, $B = [1, 2]$.

Решение. $\frac{A}{B} = \frac{[a,\bar{a}]}{[b,\bar{b}]} = \left[\min\left\{\frac{a}{b}, \frac{\bar{a}}{b}, \frac{a}{\bar{b}}, \frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right\}, \max\left\{\frac{a}{b}, \frac{\bar{a}}{b}, \frac{a}{\bar{b}}, \frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right\}\right] =$

$= \left[\min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\bar{2}}{1}, \frac{1}{\bar{2}}, \frac{\bar{2}}{\bar{2}}\right\}, \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{\bar{2}}{1}, \frac{1}{\bar{2}}, \frac{\bar{2}}{\bar{2}}\right\}\right] = [0.5, 2]$.

2. Решение линейных уравнений

2.1 Нестандартное вычитание и решение линейных уравнений $A \div X = B, X \div A = B$

Нестандартная операция вычитания $\div$, определенная для элементов $A, B \in I(\mathbb{R})$, вводится следующим образом:

$A \div B = [a, \bar{a}] \div [b, \bar{b}] = [\min\{a - b, \bar{a} - \bar{b}\}, max\{a - b, \bar{a} - \bar{b}\}]$.

Метод нестандартного вычитания:

«Interval noStandSub(Interval e, Ring ring) {};»

Пример вычисления нестандартного вычитания.

Дано: $A = [1, 2]$, $B = [1, 2]$.

Решение. $A \div B = [a, \bar{a}] \div [b, \bar{b}] = [\min\{a - \bar{b}, \bar{a} - b\}, \max\{a - -b, a-b=\min 1-1, 2-2, \max 1-1, 2-2=[0, 0]$.

Обозначим $I * (\mathbb{R}) = \{A | A \in I(\mathbb{R}), 0 \in A\}$ и укажем некоторые свойства $\div$.

Для $A, B \in I(\mathbb{R})$ уравнение $A \div X = B$ имеет решение $X = A + (-B)$. В случае $\varpi(A) \geq \varpi(B)$ у этого уравнения есть еще одно решение: $X = A \div B$. Здесь $\varpi(A)$ – это ширина интервала, которая находится по формуле $\varpi(A) = \bar{a} - a$.

Метод решения уравнения $A \div X = B$:

«Interval[] noStandSubEqu1(Interval e, Ring ring) {};»

Примеры решения уравнения $A \div X = B$.

1. Дано: $A = [1, 2]$, $B = [1, 2]$.

Решение 1. $A + (-B) = [1, 2] + (-1) \cdot [1, 2] = [1, 2] + [-2, -1] = = [1 + (-2), 2 + (-1)] = [-1, 1]$.

Решение 2. Так как $\varpi(A) = \varpi(B)$, следовательно, $A \div B = [1, 2] \div \div [1,2] = [\min\{1 - 1, 2 - 2\}, \max\{1 - 1, 2 - 2\}] = [0, 0]$.

2. Дано: $A = [12, 15]$, $B = [2, 10]$.

Решение 1. $A + (-B) = [12, 15] + (-1) \cdot [2, 10] = [12, 15] + + [-10, -2] = [12 + (-10), 15 + (-2)] = [2, 13]$.

Решение 2. Так как $\varpi(A) < \varpi(B)$, второе решение не существует.

Уравнение $X \div A = B$ имеет решение $X = A + B$. Если $\varpi(A) \geq \geq \varpi(B)$, то существует еще одно решение $X = A \div (-B)$.

Метод решения уравнения $X \div A = B$:

«Interval[] noStandSubEqu2(Interval e, Ring ring) {};»

Примеры решения уравнения $X \div A = B$.

1. Дано: $A = [1, 2]$, $B = [1, 2]$.

Решение 1. $A + B = [1, 2] + [1, 2] = [2, 4]$.

Решение 2. Так как $\varpi(A) = \varpi(B)$, следовательно, $A \div (-B) = = [1, 2] \div [-2, -1] = [\min\{1 - (-2), 2 - (-1)\}, \max\{1 - (-2), 2 - -(-1)=[3, 3]$.

2. Дано: A = [12, 15], B = [2, 10].

Решение 1. $A + B = [12, 15] + [2, 10] = [12, +2, 15 + 10] = [14, 25]$;

Решение 2. Так как $\varpi(A) < \varpi(B)$, второе решение не существует.

2.2 Нестандартное деление и решение линейных уравнений $AX = B, A: X = B, X: A = B$

Нестандартная операция деления «:», определенная для элементов $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in I(\mathbb{R})$, вводится следующим образом:

$$A:B = \begin{cases} [\min\left\{\frac{a}{b}, \frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right\}, max\left\{\frac{a}{b}, \frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right\}], \textit{если } A, B > 0, \\ [\min\left\{\frac{a}{\bar{b}}, \frac{\bar{a}}{b}\right\}, max\left\{\frac{a}{\bar{b}}, \frac{\bar{a}}{b}\right\}], \textit{если } A, B < 0, \\ \left(\frac{1}{b}\right) A, \textit{если } 0 \in A, B > 0, \\ \left(\frac{1}{\bar{b}}\right) A, \textit{если } 0 \in A, B < 0. \end{cases}$$

<u>Метод нестандартного деления:</u>

«Interval noStandDiv(Interval e, Ring ring) {};»

<u>Пример вычисления нестандартного деления.</u>

Дано: A = [1, 2], B = [1, 2].

Решение 1.

$A, B > 0, A:B = \left[\min\left\{\frac{a}{b}, \frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right\}, max\left\{\frac{a}{b}, \frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right\}\right] = \left[\min\left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{2}\right\}, max\left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{2}\right\}\right] =$
$= [1, 1];$

Решение 2.

$A, B < 0, A:B = \left[\min\left\{\frac{a}{\bar{b}}, \frac{\bar{a}}{b}\right\}, max\left\{\frac{a}{\bar{b}}, \frac{\bar{a}}{b}\right\}\right] = \left[\min\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{1}\right\}, max\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{1}\right\}\right] =$
$= [0.5, 2].$

Обозначим $I * (\mathbb{R}) = \{A | A \in I(\mathbb{R}), 0 \in A\}$ и укажем некоторые свойства «:».

Определим для элементов $A \in I * (\mathbb{R})$ функцию $\nu(A)$ следующим образом: $\nu(A) = \max\{\frac{a}{\bar{a}}, \frac{\bar{a}}{a}\}$.

Уравнение $AX = B$ *при* $A, B \in I * (\mathbb{R})$ *имеет решение тогда и только тогда, когда* $\nu(A) \leq \nu(B)$, *которое выражается в виде* $X = B:A$.

<u>Метод решения уравнения $AX = B$:</u>

«Interval noStandDivEqu1(Interval e, Ring ring) {};»

<u>Примеры решения уравнения $AX = B$.</u>

1. Дано: A = [1, 2], B = [1, 2].

Решение. Так как $\nu(A) = \nu(B)$, следовательно,

$B:A = \left[\min\left\{\frac{a}{b}, \frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right\}, max\left\{\frac{a}{b}, \frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right\}\right] = \left[\min\left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{2}\right\}, max\left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{2}\right\}\right] = [1, 1].$

2. Дано: A = [12, 15], B = [2, 10].

Решение. Так как $\nu(A) \leq \nu(B)$, следовательно, $B:A = \left[\min\left\{\frac{a}{b}, \frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right\}, max\left\{\frac{a}{b}, \frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right\}\right] = \left[\min\left\{\frac{12}{2}, \frac{15}{10}\right\}, max\left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{2}\right\}\right] = [0.2, 0.7].$

Уравнение $A:X = B$ *при* $A, B \in I * (\mathbb{R})$ *имеет решение* $X = AB^{-1}$. *Если* $\nu(A) \geq \nu(B)$, *то существует еще одно решение:* $X = A:B$.

<u>Метод решения уравнения $A{:}\,X = B$:</u>

«Interval[] noStandDivEqu2(Interval e, Ring ring) {};»

<u>Примеры решения уравнения $A{:}\,X = B$.</u>

1. Дано: $A = [1, 2]$, $B = [1, 2]$.

Решение 1. $AB^{-1} = [1,2] \cdot \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right] = [\min\{1 \cdot 1, 1 \cdot 0.5, 2 \cdot 1, 2 \cdot 0.5\},$ max*1·1, 1·0.5, 2·1, 2·0.5=[0.5, 2]*;

Решение 2. Так как $\nu(A) \geq \nu(B)$, следовательно, $A{:}\,B = [1,2]{:}\,[1,2] = \left[\min\left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{2}\right\}, \max\left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{2}\right\}\right] = [1,1]$.

2. Дано: $A = [12, 15]$, $B = [2, 10]$.

Решение 1. $AB^{-1} = [12,15] \cdot \left[\frac{1}{10}, \frac{1}{2}\right] = [\min\{12 \cdot 0.1, 12 \cdot 0.5, 15 \times$ *×0.1, 15·0.5,*max*12·0.1, 12·0.5, 15·0.1, 15·0.5=[1.2, 7.5]*;

Решение 2. Так как $\nu(A) \leq \nu(B)$, второе решение не существует.

Уравнение $X{:}\,A = B$ имеет решение $X = AB$. Если $\nu(A) \geq \nu(B)$, то имеется еще одно решение: $X = A{:}\,B^{-1}$.

<u>Метод решения уравнения $X{:}\,A = B$:</u>

«Interval[] noStandDivEqu3(Interval e, Ring ring) {};»

<u>Примеры решения уравнения $X{:}\,A = B$.</u>

1. Дано: $A = [1, 2]$, $B = [1, 2]$.

Решение 1. $AB = [1,2] \cdot [1,2] = [\min\{1 \cdot 1, 1 \cdot 2, 2 \cdot 1, 2 \cdot 2\}, \max\{1 \times$ *×1, 1·2, 2·1, 2·2=[1, 4]*;

Решение 2. Так как $\nu(A) \geq \nu(B)$, следовательно, $A{:}\,B^{-1} = [1,2]{:}\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right] = \left[\min\left\{\frac{1}{0.5}, \frac{2}{1}\right\}, \max\left\{\frac{1}{0.5}, \frac{2}{1}\right\}\right] = [0.5, 2]$.

2. Дано: $A = [12, 15]$, $B = [2, 10]$.

Решение 1. $AB = [12,15] \cdot [2,10] = [\min\{12 \cdot 2, 12 \cdot 10, 15 \cdot 2, 15 \cdot$ *10,* max*12·2, 12·10, 15·2, 15·10=[24, 150]*;

Решение 2. Так как $\nu(A) \leq \nu(B)$, второе решение не существует.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате исследования получен программный комплекс для выполнения действий с интервальными числами и решения уравнений в интервальных числах. Программы написаны на современном языке объектно-ориентированного программирования Java и добавлены в систему компьютерной алгебры Math Partner. Исследования в этом направлении могут быть продолжены. Это могло бы быть решением задач вычислительной математики.

Список литературы

1. *Малашонок Г.И.* Руководство по языку «MATHPAR». Тамбов: Изд. дом ТГУ им. Г.Р. Державина, 2013.
2. *Перепелица В.А., Тебуева Ф.Б.* Дискретная оптимизация и моделирование в условиях неопределенности данных. Пенза: Вильямс, 2012.
3. *Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.* Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.
4. *Шилдт Г.* Java. Полное руководство. М.: Вильямс, 2018.

Поступила в редакцию 11.04.2019 г.
Отрецензирована 23.04.2019 г.
Принята в печать 14.05.2019 г.

Информация об авторе:
Буряченко Ирина Петровна – студентка института математики, естествознания и информационных технологий. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: i.buriachenko@yandex.ru

THE PROGRAM COMPLEX FOR WORKING WITH INTERVAL NUMBERS

Buryachenko I.P., Student of Institute of Mathematics, Natural Science and Information Technologies. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: i.buriachenko@yandex.ru

We consider interval arithmetic – the concept of interval, standard interval arithmetic and non-standard operations on intervals, as well as the solution of some equations. We describe the interval representation as a mathematical object in the computer memory, the implementation of interval arithmetic and the equations solution in the computer algebra system Math Partner using the object-oriented programming language Java.

Keywords: interval arithmetic; interval numbers; computer algebra system Math Partner

Received 11 April 2019
Reviewed 23 April 2019
Accepted for press 14 May 2019